INFORMATION ET SIGNAL

L'information est une grandeur abstraite qui doit être codée sur un support qui permet de la traiter, de la stocker ou de la transporter.

Pour transporter l'information, on utilise en général un signal support électromagnétique : onde hertzienne ou guidée dans un câble ou une fibre optique. Ce signal se propage à la vitesse de la lumière dans le milieu considéré (par exemple 200 000 km/s environ sur un câble).

Le débit d'information va donc dépendre directement du nombre de signaux élémentaires qui peuvent être émis par unité de temps et de la quantité d'information transportable par chacun de ces signaux.

La durée d'un signal élémentaire est appelé "**moment**". Nous appellerons **Fréquence de Signalisation** le nombre de signaux élémentaires (moments) transmis par unité de temps.

Nous allons rapidement rappeler les principes de base et les propriétés principales des techniques correspondantes : Théorie de l'Information et Théorie du Signal. Pour plus d'information, on se rapportera aux cours correspondants.

1. L'information, grandeur mesurable

1.1. Définition

Supposons que le 28 de chaque mois, très régulièrement, un salarié reçoive un bulletin de paye indiquant sa rémunération habituelle. Dans la mesure où il est (quasi) certain que le contenu de ce document est le même que le mois précédent, ce document ne comporte (quasi) aucune information. Si, par contre, sa rémunération est augmentée ou affectée d'une prime exceptionnelle, ce document présentera un intérêt certain ..... L'information est d'autant plus grande pour lui que l'événement est imprévisible.

L'information est ainsi directement liée à la probabilité d'occurrence d'un événement.

Si deux événements non liés se produisent, on conçoit aisément que l'information apportée est la somme des informations liées à chaque événement. L'information est une grandeur additive.

La théorie de l'information a été publiée par Shannon en 1948 et développée par divers auteurs à sa suite. Nous nous contenterons de définir la quantité d'information liée à l'occurrence d'un événement quelconque.

Si X est un événement ayant une probabilité d'occurrence P(x), la quantité d'information liée à cet événement est définie par :

$$I = \log (1 / P(x))$$

Le logarithme peut être à base quelconque. Si on utilise un logarithme Népérien (base e), l'unité d'information ainsi définie est le **Nat**.

Pour un traitement automatique de l'information, il est plus simple de s'appuyer sur un système à base 2. Alors

$$I = \log_2 (1 / P(x))$$

s'exprime en **bits**.

1.2. Entropie et information transmise

Cette définition, due à Shannon, s'applique au cas où, si un caractère ou un bit est émis, rien ne permet de savoir quel sera le prochain caractère ou le prochain bit. Ceci n'est pas vrai pour les communications humaines où l'information est très redondante. Si dans un message de 8 lettres les 7 premières son ELEPHAN, il est raisonnable de penser que la 8ème est T .... Dans sa publication "The Mathematical Theory of Communication", introduit par analogie avec la thermodynamique le concept d'**entropie de l'information**.

L'entropie H est une mesure de l'incertitude. L'entropie associée à un message est une mesure de l'incertitude de ce qui va suivre.

Considérons un message de 6 bits; il peut prendre 64 états. Soit P_i la probabilité que le $i^{ème}$ état soit observé :

$$H = -\sum_{i=1}^{6} P_i \log_2 P_i$$

Ceci représente l'information du message.

Si un état j, pris dans cet ensemble, est certain de se produire,

$P_j = 1$, $P_{i \neq j} = 0$, alors $H = -1 * \log_2 1 = 0$.

Si les événements sont équiprobables,

$P_i = P_j = 1/64$ et $H = - 64 * \log_2 1/64 = 6$

Ainsi pour un "message" de 6 éléments binaires, l'entropie peut varier de 0 à 6 bits! D'une manière générale, pour un message de n éléments binaires l'entropie H_n est comprise entre 0 et n bits

Exercice : Calculer l'entropie liée à un dé truqué sur lequel on a remplacé les faces 5 et 6 par des 4. (Réponse : 1,79 bits)

Soit X un symbole émis par une source sur un canal de communication et Y le symbole reçu sur le collecteur. Soit H(X) l'information moyenne par caractère de cette source. H(X) est appelé **entropie de la source**.

Soit $P(x_k;y_k)$ la probabilité d'avoir simultanément $X = x_k$ et $Y = y_k$ et $P(x_k/y_k)$ la probabilité que l'on ait émis $X = x_k$ lorsque l'on reçoit $Y = y_k$. On définit l'entropie conditionnelle de la source lorsque l'on reçoit Y par

$$\mathbf{H(X/Y)} = - \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} P(x_k, y_k) \log_2 P(x_k / y_k).$$

L'information transmise à l'observa-teur de X après qu'une décision ai été prise au vu de Y est :

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y)$$

H(X/Y) représente l'information perdue ou équivocation.

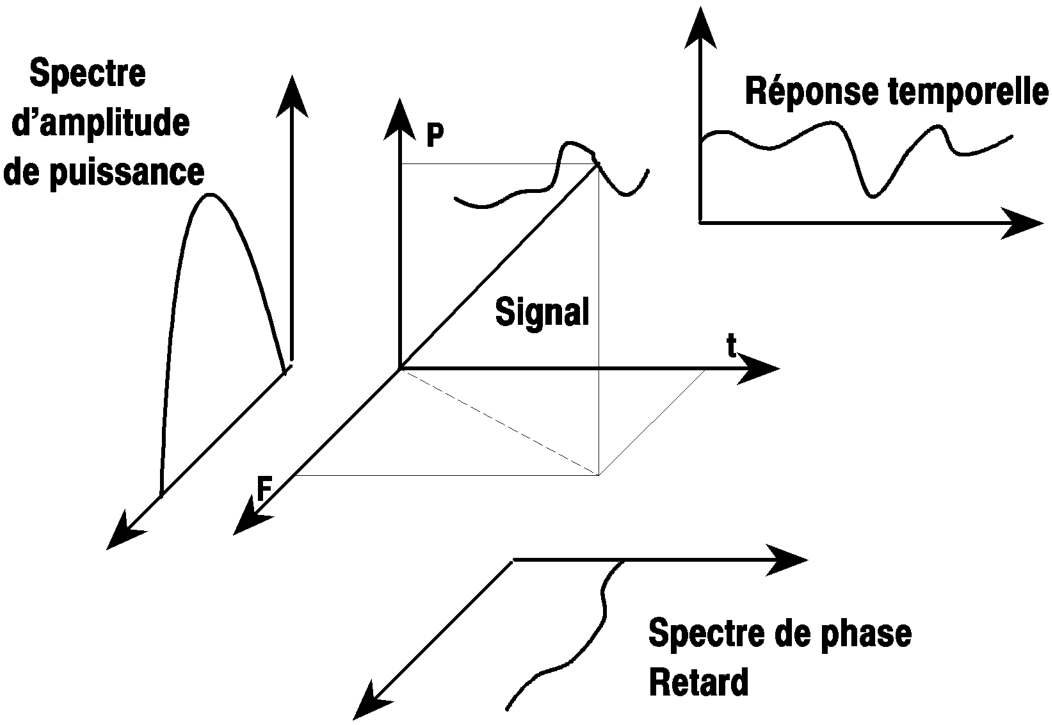
D'une manière générale, les entropies a priori H(X) et H(Y) donnent des indications sur la nature probabiliste de la source et du collecteur. H(X/Y) donne une indication sur le "bruit" ou les erreurs induites dans le canal et I(X;Y) indique dans quelle mesure on peut recouvrer l'entrée X d'un système si on reçoit un symbole Y en sortie.

Shannon a, par ailleurs, étendu ces définitions à des systèmes continus, pouvant prendre des états quelconques avec une distribution de probabilité continue.

Pour une telle source, émettant un signal de puissance S qui suivrait une distribution gaussienne, l'entropie vaut $H = \log_2 (2\pi eS)$.

2. Transmission d'un signal impulsionnel

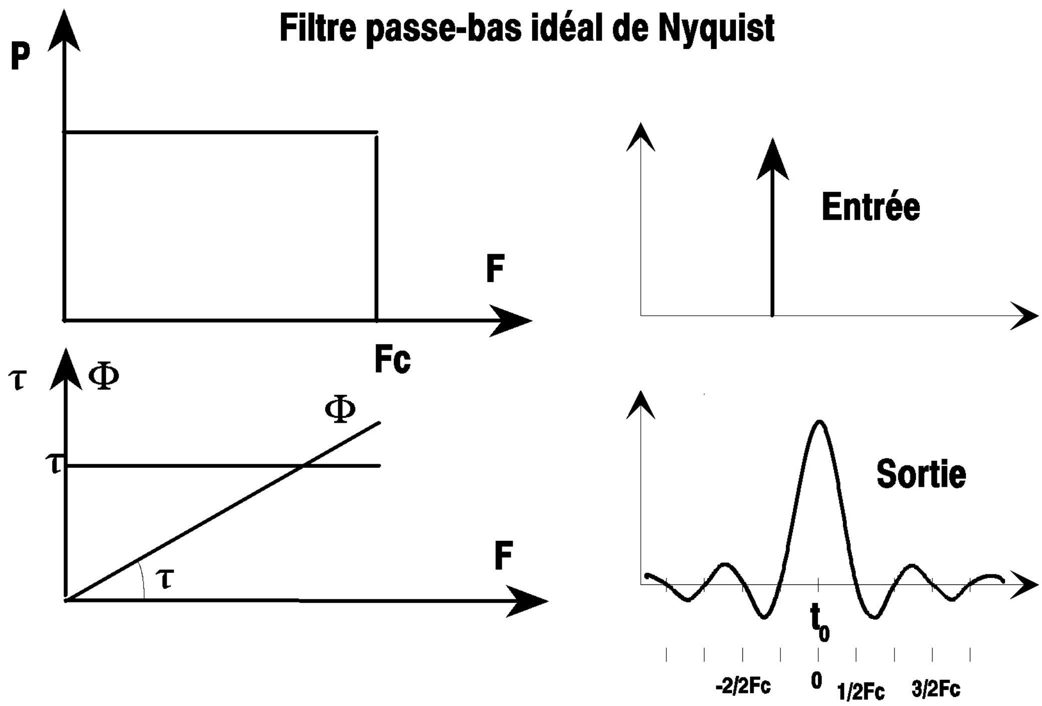
Un **signal** quelconque est une fonction du temps. Il est caractérisé par son **amplitude** ou sa puissance et par sa **répartition en fréquence** (il est plus ou moins "grave" ou "aigu"). Cette répartition en fréquence, établie en faisant une moyenne sur une période de temps longue, est le **spectre de puissance** de ce signal. On peut aussi étudier



les variations de phase ou de retard d'un signal transmis ou traité en fonction de sa décomposition en fréquence.

En 1924 Nyquist a étudié la capacité d'un canal sans bruit. Il l'a modélisé d'abord par un filtre passe-bas idéal, qui laisse passer le signal sans déformation dans une plage de fréquences de 0 à F_c Hz. F_c est sa fréquence de coupure.

Si on applique à l'entrée d'un tel système un signal élémentaire infiniment bref,



une impulsion de Dirac, de puissance finie, on montre que le signal en sortie prend la forme : $S = 2F_c \dfrac{\sin(2\pi F_c(t-\tau))}{2\pi F_c(t-\tau)}$. τ représente le retard de transmission.

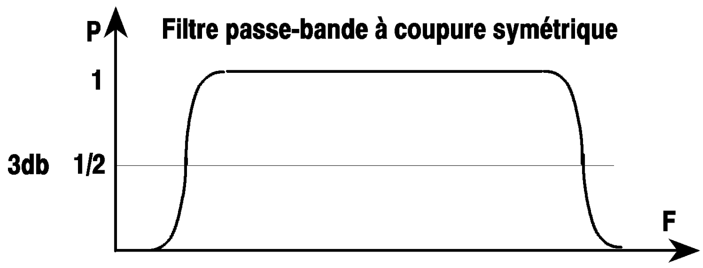
Un tel signal se caractérise par des passages à 0 à des instants équidistants de $1/2F_c$..

Si on émet des signaux à des intervalles de temps périodiques, de période $1/2F_c$, et si on observe le signal reçu uniquement aux instants correspondants aux retards τ , ils ne subissent aucunes interférences entre eux puisque, à ces instants, tous sont nuls sauf un; l'amplitude observée alors est proportionnelle à la puissance émise par ce seul signal non nul. Il n'y a pas d'**interférences entre symboles**.

Tout signal impulsionnel transmis peut être décomposé en un produit d'une impulsion de Dirac et d'une fonction le caractérisant. Les passages à 0 sont donc conservés.

Ce filtre idéal est irréalisable en pratique car il anticipe; le signal commence (en théorie) à être reçu bien avant d'avoir été émis ..... On ne peut même pas en réaliser des approximations convenables.

Toutefois Nyquist a montré que ses propriétés étaient conservées pour des filtres à "coupure symétrique" pour lesquels l'atténuation du signal de son maximum à 0 est une fonction symétrique impaire, par exemple une fonction sinusoïdale décalée (filtre en Cosinus décalé). Un tel filtre est encore anticipateur et théoriquement irréalisable, mais on peut en construire de bonnes approximations qui présentent des propriétés suffisantes. Par ailleurs Nyquist a aussi montré que ces propriétés restaient valables pour un filtre passe-bande pour lequel l'intervalle entre les fréquences de coupure basse et haute vaut F_C.



Pour tous ces filtres de bande passante F_C, on peut transmettre des signaux à la **fréquence de signalisation** maximale de

$$\boxed{F_S = 2\,F_C}$$

Cette fréquence de signalisation s'exprime en bauds. La durée T de chaque signal élémentaire se nomme un moment : $F_S = 1 / T$.

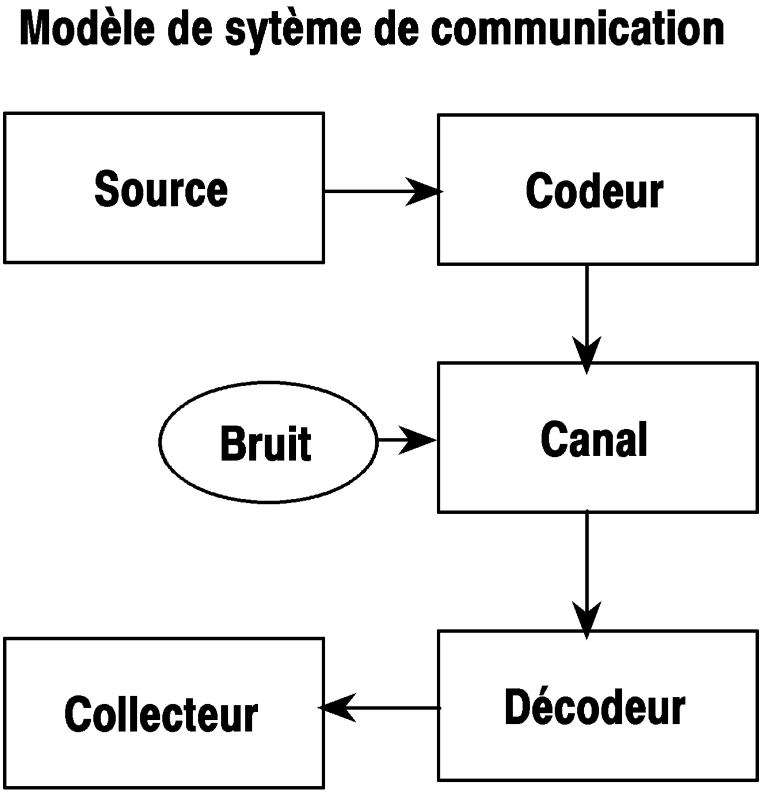
3. Transmission sur un canal bruité

3.1. Modèle de système de communication

Les éléments de base d'un système de communication sont au nombre de trois :

La source d'information ou émetteur
Le collecteur d'information ou récepteur
Le canal ou circuit de transmission

Ce canal permet le transfert de l'information entre source et collecteur. On peut compléter ce schéma par deux éléments plus ou moins complexes, les codeurs et décodeurs placés respectivement entre source et canal et entre canal et collecteur. Ces composants sont chargés d'adapter l'information aux caractéristiques du canal pour minimiser ses pertes.



Un canal de transmission est très sensible aux per-turbations extérieures. Il reçoit des signaux parasites, le **bruit**, qui s'ajoutent au signal utile transmis.

Si ce bruit était nul, chaque signal transmis pour-rait transporter une quantité infinie d'in-formation.

Shannon, Hartley et Tuller ont montré qu'**en présence de bruit, la quantité maximale d'information** que pouvait contenir un signal élémentaire était $C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \frac{S}{B})$ bits, si S est la puissance du signal et B la puissance du bruit.

Pour un canal pouvant transporter $2F_c$ signaux par seconde (d'après Nyquist), le débit maximal est donc :

$$\boxed{D = \frac{F_s}{2} \log_2(1 + \tfrac{S}{B}) \ b/s}$$

C'est le théorème de Shannon-Hartley-Tuller. Il donne le **débit maximal théorique** d'un canal. Il a été établi en considérant que les répartitions de puissance du signal et du bruit suivaient des distributions de probabilité gaussienne qui ne sont pas observées dans la réalité. Il fixe donc un objectif (ou une référence) dont on essaie de s'approcher.

Nota : Pour établir cette loi on calcule l'entropie H(Y) du collecteur qui est égale à $\frac{1}{2}\log_2(2\pi e(S+B))$ et celle du bruit H(Z) qui vaut $\frac{1}{2}\log_2(2\pi eB)$. L'information I(X;Y) transmise de la source X au collecteur Y est la différence entre ces deux valeurs soit

$$I(X;Y) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e(S+B)) - \frac{1}{2}\log_2(2\pi eB) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S+B}{B}\right)$$

Ceci suppose que les distributions de probabilité de S et B sont gaussiennes.

Si chaque symbole peut prendre N états équiprobables (N niveaux), correspondants à **n = $\log_2$ N bits**, le débit maximal du canal sans bruit ou très faiblement bruité est

$$D = F_s\, n = F_s \log_2 N = 2F_c \log_2 N \text{ bits par seconde.}$$

Cette valeur doit rester inférieure au débit maximal théorique.

3.2. Exemples

1 -

Pour un canal présentant un rapport signal sur bruit S/B de 48 db et une bande passante de 2400 Hz, que valent la fréquence maximale de signalisation et le débit maximal théorique ?

F_c = 2400 Hz ; d'après Nyquist $F_s = 2\,F_c$ = 4800 bauds

S/B db = 48 db = 10 $\log_{10}$(S/B) soit S/B≈ 63000

$$D\ b/s = F_c \log_2(1 + S/B) = \frac{2400 * \log_{10} 6300}{\log_{10} 2} \approx 38400 \text{ b/s}$$

2-

Sur une liaison de bande passante 3 kHz, on émet avec une puissance S de 1 mW. Cette liaison atténue le signal de 30 db, soit d'un facteur 1000 (rappelons que l'atténuation maximale permise sur une liaison téléphonique est de 36 db). Le niveau de bruit observé à la réception est B = 10 nW. Calculer la fréquences de signalisation maximale , le débit maximal théorique et le débit maximal pratique pour un codage à N niveaux équiprobables.

F_S = 6000 bauds

S = 10^{-3} /1000 = 1000 nW
S/B = 1000 / 10 = 100 = 20 db

Capacité maximale pour un signal élémentaire :

$$Cth = \frac{1}{2}\log_2(101) \approx \frac{1}{2}\frac{\log_{10}(101)}{0,30103} \approx 3,329 \text{ b}$$

Dth = 6000 Cth ≈ 19975 b/s

Nombre maximal de bits par signal élémentaire :

n = 3 correspondant à un codage à N = 2^3 = 8 niveaux.

Débit maximal pratique D = 6000 $*$ 3 = 18000 b/s

Débit réel (standard) utilisable : 14400 b/s (4800 $*$ 3)

ou 9600 b/s (4800 $*$ 2)